

Lemme 14 Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, alors

$$\det(A) = a_{1,1} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

(Preuve des lemmes dans les notes)

Proposition 9

(OEC.I) $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = - \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$

(OEC.II) $\det(\bar{a}_1, \dots, \lambda \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n) = \lambda \cdot \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

(OEC.III) $\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_n)$ par $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i \neq j$

$\left. \begin{array}{l} \text{par (MUL) + (ALT)} \\ \text{par (MUL) + (ALT)} \end{array} \right\}$

(preuve = exercice) $\uparrow$ i -ème colonne (et $\bar{a}_j$ est la j -ème colonne de)

(Preuve de (OEC.III)) Pour $i \leq j$:

$$\det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) + \lambda \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) = \det(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_i, \dots, \bar{a}_j, \dots, \bar{a}_n) \quad \checkmark \quad \square$$

$\uparrow$ i -ème colonne

(MUL)

$= 0$ d'après (ALT)

Dans cette séance on va voir

(Avec Prop. 9)

(10.10.24)

- (i) plusieurs exemples de calcul du déterminant;
- (iii) lien entre inversibilité et déterminant;

(ii) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$;

~~(iv) formule de Cramer~~

$$L_3 \leftarrow -\frac{1}{12} \cdot L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A^{(5)}$ $A^{(6)}$

$$= (-2) \cdot (-12) \cdot \det(A^{(6)})$$

$\uparrow$
(OFL.III)

$$= 3$$

$$\Delta \text{ sup!} \Rightarrow \det(A^{(6)}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$$

Alors

$$\det(A) = (-2) \cdot (-12) \cdot 3 = 72$$

Méthode 2 Mélanger Méthode 1 et développement selon lignes/colonnes

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_1} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dév. selon 2ème ligne}} (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ (OFL.III) $\uparrow$ 2ème ligne

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 = (-3) \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} = -6 \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{dév. selon 1ère ligne}} (-6) \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ (OFL.III) $\uparrow$ Selon 1ère ligne

$$= (-6) \cdot (-3) \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 18 \cdot 4 = 72 \quad \checkmark$$

$\underbrace{6 \cdot 2 - 8 \cdot 1}_{=4}$

§ 9.4. L'identité $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

Thm. 9.18 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(Preuve) Voir les notes $\square$

Thm. 9.19 Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

(Preuve) Si A est inversible, alors il existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ t.q. $A^{-1} \cdot A = I_n$. Alors

$$1 = \det(I_n) = \det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \det(A) \Rightarrow \det(A) \neq 0 \text{ et même } \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

On va montrer maintenant que si $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible. Pour cela, on montre la contraposée.

Comme A n'est pas inversible, sa F.E.R possède une ligne nulle. En plus, on sait qu'il existe $\underline{F}^{(q)}, \dots, \underline{F}^{(p)}$ matrices élémentaires t.q. $A = \underline{F}^{(p)} \dots \underline{F}^{(1)} \cdot \hat{A}$.
 $\hat{A} \Rightarrow \det(\hat{A}) = \det(A) - \det(\underline{F}^{(p)}) \dots \det(\underline{F}^{(1)}) \det(A')$
 $\uparrow$ la F.E.R de A

Comme A' est Δ . sup et possède une ligne nulle, un coefficient de la diagonale de A' est 0, ce qui dit que $\det(A') = 0$. Ça implique que $\det(A) = 0$, car $\det(A) = \det(E^{(n)}) \dots \det(E^{(1)}) \cdot \underbrace{\det(A')}_{=0}$. $\square$

Quelques applications

$$\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det(A), \quad \forall P \in M_n(\mathbb{R}) \text{ inversible}, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

(on dit que B et A sont semblables s'il existe $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = PAP^{-1}$)

(Prove) $\det(P \cdot A \cdot P^{-1}) \stackrel{\text{Thm 9.18}}{=} \det(P) \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(P^{-1})}_{=\det(P)^{-1} \text{ (Thm 9.19)}} = \det(A)$

